2021年

チャレンジコミュニティ・クラブ ホームカミングデイ

明治学院大学　村田玲音学長　　講演会

2021 年 6 月 19 日（土）明治学院大学 3201 教室とリモートでＣＣクラブホームカミングデイ講演会が開催されました。

講演は村田玲音明治学院大学学長にお願いして、「円周率って何だろう？人間はどうやって 数 を理解してきたか」というテーマでお話しをしていただきました。

チャレンジコミュニティ通信 46 号に講演内容の抜粋版を掲載しましたが、村田玲音学長に講演内容の全文をご確認いただき、ホームページに掲載することが出来ました。

村田玲音学長には講演会準備から原稿の確認まで、お忙しいなか大変お世話になりました。有り難うございました。誌面上ですが、御礼申し上げます。

Challenge Community Club Home Coming Day
講演会

円周率って何だろう？

人間はどうやって 数 を理解してきたか

講 師　明治学院大学 学長　村 田 玲 音

皆様初めまして、明治学院大学学長の村田玲音と申します。今日はよろしくお願いいたします。私は昨年 4 月から学長を引き受けております。昨年の 1 月から新型コロナウイルスの感染拡大が始まりまして、就任直後から今日にいたるまで約 1 年半、これと格闘しながら大変な時期を過ごしてまいりました。3 カ月くらい前でしたか、ＣＣクラブの方からホームカミングデイをやるので、数学の話をしてくださいというお話がありました。明治学院大学で理科系出身の人が学長になるのは私が初めてでしたので、数学の話ならできるかなと思ってお引き受けしました。その後 2 週間くらいたって同じ方がいらして、ぜひ「元気の出る数学の話」をお願いしますとのこと。数学の話ならできるだろうし、元気の出る話もできるかもしれないが、「元気の出る数学の話」はできるだろうか…　と首をひねることになりました。今日は数学的な内容を盛り込んだ話をいたしますが、話が終わったときに「今日の私の話で元気が出ましたか？」と皆さんにぜひお尋ねしてみたいと思っています。

私は今 67 歳ですが、今日は私より高齢の方がかなりいらっしゃると伺いました。今日のお話のタイトルは『円周率って何だろう？』としましたが、もっと大切なテーマは『作図問題』です。作図問題というのは、中学 1 年で最初に数学を学んだとき出てくる話題でして、皆さんは定規とコンパスで色々な図形を描くことを教わったと思います。正確には初等幾何学といいます。数学の第 1 歩を初等幾何学から始めるというのは、ずーっと昔から人間が続けてきたことなのです。私より少し年下の人くらいまでは、数学の授業はたいてい初等幾何学から始まっていました。二等辺三角形の証明だとか、2 角挟辺の証明だとか、そういう幾何学をみっちり教えられて、そのうえで普通の数学に進んでいくのが従来の数学教育のやり方でした。私は、個人的にはこのやり方が最も良い数学の教え方だと思っています。このやり方を、人間は古代ギリシャ時代から 2000 年以上にわたって続けてきたのです。ところが最近中学校で教える内容は、どちらかというと幾何学を軽視する傾向があります。

ですから今日の話は、今の高校生や中学生には案外馴染みがないかもしれません。でもここにいらっしゃる皆さんは、かなり昔になりますが、作図問題を一度は必ず学んだことがあると思います。昔を思い出して解っていただけるかなと思い、テーマに選んでみました。ところどころ難しいところがあるかと思いますが、話はなるべく易しくし、トピックスをいくつか積み重ねる形で進めてまいります。途中で解らなくなっても、次の話題に移ればまた解るようになりますので安心してください。中に面白い話があったら楽しいなと、そんな気楽な気持ちで聞いてください。

目次

さて、タイトルは『円周率って何だろう？』です。円周率は、昔 3.14 と教わったと思います。特別な数で、直径に 3.14 を掛けると円周の長さになります。ただ、今日は少し数の範囲を広くとって、「人間はどうやって数を理解してきたのだろう？」というテーマについてお話ししようと思います。

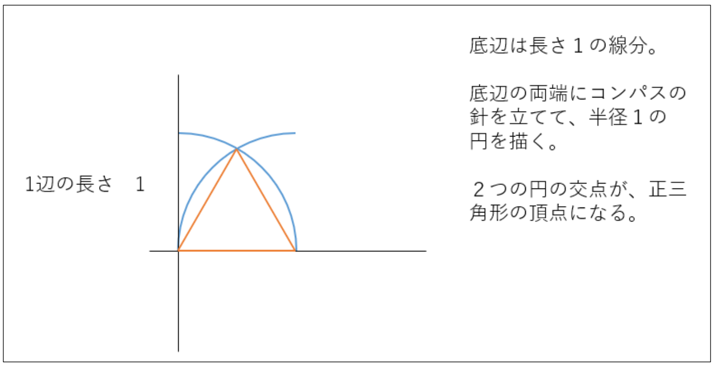
今日の話の目次は、左のようになっています。

第１章では作図問題、定規とコンパスを使った作図問題を、円周率という視点から見ていきます。第２章では有理数と無理数について、やはり作図問題を絡めてお話しします。無理数なんて忘れましたという方がいらっしゃっても大丈夫です。ただ、正三角形、正四角形、正五角形、正六角形…　こういう正多角形と有理数、無理数は非常に関係が深いのです。そして第３章でもう一回、円周率に戻ってきます。数学をやっていると、とんでもないところで円周率が出てくることがあります。どうしてこんなところに円周率が出てくるんだろう…　数学者にとっても驚くような事実をいくつか紹介してみます。これについては単純に、世の中には面白いことがあるものだと感心してくだされば結構です。

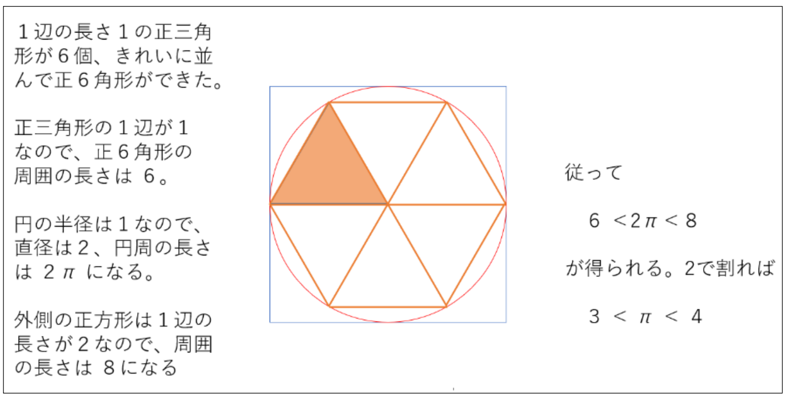
これから、円周率を π と書くことにしましょう。

では第１章です。まず復習から始めます。古代ギリシャの作図問題、これは「与えられた図形を定規とコンパスだけを使って描けるか」という問題です。「定規とコンパスだけ」というところが、非常に重要です。

最初は「与えられた線分の上に正三角形を作れ」という課題です。これを定規とコンパスを使って作図してみましょう。これは非常に簡単で、すぐできます。



右上の図の横線は底辺で、長さ１の線分だと思ってください。コンパスを使って下の線分と同じ長さで円を２つ描き、２つの円の交点を線で結んでやれば正三角形ができます。正三角形の作図はこれだけですから、作図問題の中では一番簡単でしょう。にもかかわらず、これだけできれいな図が描けます。この正三角形の斜めの辺のところにまた正三角形を作り、時計回りに正三角形を継ぎ足していくと、一つの正三角形から出発して正三角形がちょうど 6 個作れて正六角形ができます。この正六角形の１辺は１ですから、できた正六角形の周囲の長さは 6 になります。一方この正六角形を外側から囲むように半径１の円を描くと（外接円）、正六角形の外側に描いてある円になります。



外接円の直径は 2 ですから、円周の長さは 直径×円周率 で 2 π になります。外接円のほうが正六角形より外側に膨らんでいますので、明らかに 2π の方が正六角形の周囲の長さ 6 より大きい。この外接円の外側に、外接する正方形を描いてみます。この正方形の 1 辺の長さは 2 ですから、周囲の長さは 8 になります。そうすると、この簡単な図だけから、正六角形の周囲の長さ 6 より円周の 2π の方が長く、円周の長さ 2π より正方形の周囲の長さ 8 の方が大きい、ということが分かります。式に直してみると、$6<2\pi<8$。これを 2 で割ると、$3<\pi<4$ が得られます。これにより、円周率は 3 より大きく、4 より小さいことが分かりました。

数学の一つの魅力は、見る側の人間が何に興味を持っているか、どこに注目しているかによって、図形の持つ意味が大きく変わってくることでしょう。今の場合ですと、正六角形と外接円を描いただけで、「円周率は 3 より大きい」という素晴らしい結果が出てくるのです。

一つ余談を入れます。ご記憶の方がいらっしゃるかもしれませんが、数年前、文科省がこれから円周率は 3.14 ではなくて 3 と教えようと言い出したことがあります。私たちが教わった 3.14 だと子どもの頭に余計な負担をかける。だからこれからは 3 にしようという話でした。数学者というのは、およそ政治に興味を持たない人間ばかりなんです。日本数学会は会員が一万人近くいる大きな学会ですが、政治的な活動はほとんどやりません。ところが、文科省が円周率を 3 にしてはどうかと言ったときだけは、日本数学会が猛烈に怒りました。絶対そんなことをしてはいけない。その理由は、円周率を 3 にするということは円の周囲を正六角形と同じにしてしまうことだ。円の神秘さ、美しさなどは、全体に丸く膨らんでいるところにある。円の円らしさは膨らみにあるのに、それを 3 にして潰してしまうとは何事か、というわけです。文科省に非常に強く抗議をしたところ、文科省はすぐ引っ込めました。ですから今でも円周率は 3.14 で教えられています。

もう一つ余談を入れましょう。私たちは角度を測るときに、全円、ちょうど一回転したときを 360 度として測っています。1 度を細かくすると 60 分になり、そして 1 分は 60 秒になります。台風の位置を正確に言うときなど、北緯何度何分という単位が出てきます。一方、時間を測るときは、1 時間が 60 分で 1 分が 60 秒です。角度と時間で同じ単位を使い、しかも 60 ずつまとめていく 60 進法を使っているところまで同じです。なぜでしょうか？　実は正六角形の図と深い関係があります。全円を 360 度に分割し始めたのはメソポタミア人だといわれています。

ではなぜメソポタミア人はこんな測り方をしたのでしょうか。当時は時計なんてありませんから、天体観測をして時刻を計ったのです。ですから、星の位置（角度）と時間は同じものだったんですね。もう一つ、メソポタミア人は車輪を発明しました。車輪は丸い円盤ですが、なるべく軽い方が機能的ですので、彼らはスポーク（spoke、輻（や）のこと）を入れて強度と機動性を持たせることを考え出しました。メソポタミアのレリーフなどには、車輪に 6 本スポークが入っている図をよく見かけます。メソポタミア人は、円の中に正三角形がちょうど 6 個入る図を非常に大切にしました。スポークで区切られた部分をひとつの単位と考え、そこにメソポタミア人が使っていた 60 進法を適用したのです。全円＝正三角形× 6 、そして正三角形の頂点を 60 に分割し（60 度）、その 1 度を 60 分、そして 60 秒と分けていったのです。その結果、角度を測るのと時間を計るのとが同じ単位になり、60 進法もそのまま残ってしまいました。メソポタミアは最古の文明の一つですから、この測り方には 4～5000 年の歴史があることになります。おそらく人間が使っている単位の中で一番古いものでしょう。私たちは長さを測るときメートル法を使っていますが、メートル法が出てきたのはフランス革命の頃ですから、せいぜい 2～300 年前の話です。角度の 360 度というのはとんでもなく

古いのです。考えてみれば不思議な話です。

話を元に戻しましょう。先程、円周率は 3 と 4 の間にあると言いました。 $3 < \pi < 4$ です。これからは、π の値をもっと詳しく出せないだろうか、という話になります。

アルキメデス（イタリアのシラクサの人）は、
6角形 → 12角形 → 24角形 → 48角形 → 96角形 と細かくしていって円周率の値を調べた。内接正96角形、外接正96角形を使ったため、上限と下限が求まっている。

アルキメデスの得た値

$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$　小数にすると $3.1408 < \pi < 3.1429$

彼の計算のおかげで、π は 3.14 までは正しいことが確定する。3.14 には、このように崇高な由来がある。

アルキメデスは、名前をご存じの方も多いと思います。イタリアのシチリア島にシラクサという非常に古い町があり、そこで活躍した人です。紀元前 287 年から紀元前 212 年まで、75 歳くらいまで生きた当時としては長命な人です。この人は非常に優れた数学者で、現代の数学者が《有史以来の優れた数学者のベスト 5》を選ぶとしたら、必ず入ってくる人でしょう。

アルキメデスは π の正確な値に挑戦した最初の天才数学者でした。彼は円のことを調べるために、円を内側と外側から正多角形で挟んだのです。さっき、私たちは円を正方形と正六角形で挟みましたが、アルキメデスは同じことをやってみました。円の内側と外側を正六角形で挟み、12 角形で挟み、次に 24 角形で挟み…　と少しずつ角数を増やしていって、だんだん円に近づいていくように工夫をし、円周率をなるべく正確な値まで出そうとしました。当時は、紙も鉛筆も無く、作図を石や砂の上に描いていくわけですが、アルキメデスは 96 角形まで計算しました。今の目から見ても、96 角形の周囲の長さまで計算していったことは信じられません。そこまでやって、アルキメデスは「π の値は $3+\frac{10}{71}$ と $3+\frac{1}{7}$ の間である」と記録に残している。これを小数にしますと、「π の値は 3.1408 より大きく 3.1429 より小さい」となります。ですから、アルキメデスの得た結果だけから、円周率は 3.14 までは正しいということが確定する。彼のこの結果は長い数学の歴史の中でも極めて高く評価されています。上限と下限を出すことによって、数の正しい確定値を求めたのは、アルキメデスが初めてなのです。3.14 には人間のこういう長い歴史と英知が凝縮しているのです。これを軽々しく 3.0 にすることはできません。

古代インド、エジプト　それぞれ数値を計算している。

$\frac{22}{7}$　$\frac{3927}{1250}$　$\frac{142}{45}$　$\sqrt{10} \fallingdotseq 3.1622$　等々。

古代中国　祖冲之（A.D. 500頃）

大体の値　$\frac{22}{7} \fallingdotseq 3.1429$

密率（正確な値）　$\frac{355}{113} \fallingdotseq 3.1415929$

π の他の値について、ちょっと歴史を見てみましょう。高い文明を持った文化圏では必ず円周率のことを調べています。

色々な文明が色々な数字を見つけていますね。$\frac{22}{7}$、$\frac{3927}{1250}$ これはエジプトです。$\frac{142}{45}$ はインド。$\sqrt{10}$ 、これもエジプトです。ただ、これは本当にエジプト人が見つけたものなのか、あるいはどこか別の文明から伝わってきたものなのか、それは分かっていません。

東洋では、AD 500 年頃、中国に祖冲之という人がいました。日本では邪馬台国くらいの時代ですね。円周率の値はだいたい $\frac{22}{7}$ だと言っています。これは相当良い数字でほぼ 3.1429 ですから、アルキメデスの得た値と似たレベルの数字です。さらに祖冲之は、円周率に関して自分はもっと正確

な値が出せたと言っています。それが $\frac{355}{113}$ です。これは覚えやすいですね、1、1、3、3、5、5 ですから。小数に直すと 3.14159265… と続いていて、これは驚異的な数字です。どうやってこんな良い数字を見つけることができたのでしょうか？

これに関して、私たちはほぼ答えを知っています。今日詳しいことはお話できませんが、連分数展開という数学の手法が知られています。連分数展開を使うと、目標の値に非常に近い分数をピンポイントで探し出すことができるのです。

どうしてこんなに素晴らしい近似分数を見つけられたのか？
→ 連分数展開 という方法が知られている。
π の近似値と連分数展開を組み合わせると：

第 1 近似分数	3			
第 2 近似分数	$\frac{22}{7}$	≒	3.1429	⇐
第 3 近似分数	$\frac{333}{106}$	≒	3.141509433	
第 4 近似分数	$\frac{355}{113}$	≒	3.14159292035	⇐ 祖冲之の密率
第 5 近似分数	$\frac{103993}{33102}$	≒	3.14159265301	

円周率に連分数展開を応用してみましょう。連分数展開は第一連分数、第二連分数、第三連分数、第四連分数と、次々に作っていくことができて、近似はどんどん良くなっていきます。円周率の場合、第一連分数（第一近似分数）として 3 が出る。第二近似分数が $\frac{22}{7}$ 、第三近似分数が $\frac{333}{106}$ 、第四近似分数としてずばり $\frac{355}{113}$ が出てくるのです。このあと、第五、第六とやっていけば、さらに円周率に近い近似分数が出てきます。 $\frac{355}{113}$ の次は $\frac{103993}{33102}$ になります。驚異的な分数ですが、これは連分数展開を知っていてできること。連分数展開は、中世のヨーロッパで出てきた方法です。祖冲之は連分数展開を知らないはずで、 $\frac{355}{113}$ をどうして出せたかは謎のままです。

ここで第一章を終わりにして、第二章に入りましょう。

2　有理数と無理数　― 正多角形と無理数の発見

数の種類をおさらいしよう（今日は正の数しか考えない）

自然数　1, 2, 3, 4, 5, …

有理数（分数のイメージ　分母も分子も自然数） $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{22}{7}$ 等
実数（数直線のイメージ）
実数で、有理数でないものを 無理数 という。

問　円周率 π は有理数だろうか？　→ 実は難問

少し円周率から離れて、有理数と無理数について話をします。ちょっとおさらいをしておきましょう。数には色々な種類がありますが、一番簡単な数は自然数です。今日は正の数しか考えないことにします。自然数は物の個数を数えるときに必ず出てきます。自然数の大きな特徴は、値が飛び飛びなんですね。1 と 2 の間に自然数はありません。もう一つ、自然数どうしで足し算や掛け算をしても結果は自然数ですが、割り算をすると自然数の中に収まらないことがあります。有理数は、$\frac{\text{自然数}}{\text{自然数}}$ を全部

集めたようなもので、有理数まで広げると、有理数どうしで四則演算（＋－×÷）をしても有理数の範囲内に答えが見つかります。割り算はもともと《比》のことですから、有理数とは「自然数 対 自然数 の比」を全部集めたものと思っていただいても結構です。だからこれは有理数と言うより《有比数》とすべきだという人もいます。明治期に西洋数学が日本に入ってきたとき、有理数と翻訳してしまったんですね。

有理数から大幅に拡がった数が実数で、これは数直線を想像してください。実数の中には有理数でないものがありますが、これを無理数と言います。無比数といった方が分かりやすいかもしれません。要するに「自然数 対 自然数 の比」に書けない数のことです。

円周率は 3 と 4 の間にあると簡単な方法を使ってお示ししました。では、円周率は有理数なのでしょうか、無理数なのでしょうか？　これは非常に難しい問題なのです。ここで答えを言うのは簡単でして、円周率は実は有理数ではありません。自然数は飛び飛びの値をとりますから、 3 と 4 の間にあると言えれば、自然数でないことが確定します。ところが有理数は飛び飛びでないので、有理数でないことを言うには別の方法を考えないといけません。

ここで問題を少し拡げてみましょう。人間が「数を完全に理解した」と思えるのは、どこまででしょうか？　自然数とは物の個数です。これならみんな完全に分かった気になりますよね。5 だろうが 10 だろうが 1 億だろうが、物の個数ですから。自然数というのは確かに人間がみな「完全に理解した」と思える数です。では有理数はどうでしょう。例えば「 $\frac{1}{2}$ 」であれば、1 つのリンゴを 2 人で割った片方と理解できます。$\frac{22}{7}$ であれば、22 個の物を 7 つに等分したと理解できる。有理数というのは、個数をいくつかに等分したものなので、これもまあ「完全に理解できる」と言ってよいでしょう。

> 人間が《完全に理解できたと思える数》はどこまでか？
>
> 自然数は？　→ よく理解できる
> 有理数は？　→ まあ理解できる
>
> では 無理数は？　例えば $\sqrt{2}$ は理解できたと言えるのか？
> 例えば、 $\sqrt{2}$ を小数で書いたとき、１億桁目の数字はいくつか？
>
> $\sqrt{2}$ とは「平方したら２になる数」と言っているだけ。
> 「$\sqrt{2}$ とは 方程式　$x^2 = 2$　の解である」と言っている。
>
> 数を理解するうえで、《方程式》は、有力な手段であることが分かる。方程式を使うと、理解できる数の範囲が拡がる。

ところが有理数ではなく無理数になると、事情が一変します。私たちに一番身近な無理数といえば $\sqrt{2}$ あたりでしょうか。では、はたして人間は$\sqrt{2}$ を完全に理解したといえるのか？　これをちょっと考えていただきたいのです。$\sqrt{2}$ はルートという記号がついているので、なんとなく分かった感じになります。でも、$\sqrt{2}$ というのは「２乗したら２になる数」と言っているに過ぎません。あるいは、「$x^2 = 2$ という方程式の（正の）解」として理解しているに過ぎないのです。これを、完全に理解したと言えるのかどうか。$\sqrt{2}$ を小数に直したとき、1 億桁目の数字はいくつですかといわれると、答えに詰まってしまう。普通はそこまで答えることができません。ところが有理数なら、例えば $\frac{1}{7}$ という有理数は小数に直したとき、0.142857 142857… と 142857 がずーっと循環することが知られています。だから $\frac{22}{7}$ の 1 億桁目の数字はいくつですかと問われると、すぐに答えることができます。そういう意味で、有理数というのは「理解できる数」であり、無理数はそう簡単にはいかな

いのです。ただ、今の例から無理数を理解する手段として、方程式は非常に有力な手段だということも分かります。

図形を使って数を理解する立場に立つと、

$\sqrt{2}$ は「一辺１の正方形の対角線の長さ」である
π は「直径１の円の周囲の長さ」となる

古代ギリシャの人々は、
「自然数だけを数と考え、有理数は《比》として理解し、
それ以外の数は《幾何学的に得られる量》を《数》として考えた」
彼らにとって、幾何学的に得られる量が有理数で書けるのか
どうかは、非常に大きい問題だっただろう。ただ、この問題に
かなり答えることができるようになったのは、19世紀である。

ところで、今出てきた $\sqrt{2}$、これは図形を使えば簡単に理解することができます。１辺の長さが 1 の正方形を描いて対角線を引くと、『三平方の定理』、昔は『ピタゴラスの定理』と言ったものですが、これを使うと斜辺の長さ＝ $\sqrt{2}$ が出てきます。つまり、幾何学というのはある意味で驚くべき能力を持っていて、数字のままだとどうにも理解しにくい物が図形で見るとはっきり見えてくることがあるのです。ここに注目して、図形を使って数を理解しようというのが、ギリシャ人が熟慮した末に選んだ方法だったのです。

さて、そこで今日のテーマである円周率を見てみましょう。コンパスで直径１の円を描けば周囲の長さは π ですから、図形を使えば円周率は簡単に理解できる数になってしまうのです。昔のギリシャ人ほど、何が解っていて何が解っていないのか、これを哲学的に突き詰めて考えた人たちはいませんでした。ですから古代ギリシャで数学が生まれたのです。古代ギリシャ人にとって、自分たちがはっきり理解できるのは自然数だけだ、自然数は理解できる。その先の有理数は、1：3 とか 7：22 とか、そういう比の形なのだから、これも理解できる。自然数が理解できていれば、有理数も理解できる。ところがそれ以外は、例えば $\sqrt{2}$ とか円周率のように幾何学的に表すことができる量は素性がはっきりわかるので、これも理解できる量に入れて良いのではないか。これが、ギリシャ人がたどり着いた原則なのです。この原則が古代ギリシャ以来、ずーっと西洋では引き継がれてきました。

$\sqrt{2}$ や円周率 π のように図形で表せる数は「理解できる数」、定規とコンパスでは描けない量は「理解できない量」。この原則を採用すると、ある量が「図形で描けるのか描けないのか」は、彼らにとって大問題になります。ところが、「図形で描ける」ことを言うのは比較的易しいのですが（実際に描いてみればよい）、「図形では描くことができない」ことをきちんと言うのは至難の業でした。方法が見つかって、「この量は定規とコンパスでは描くことができない」ことを証明できるようになったのは、なんと 18 世紀から 19 世紀にかけてなのです。ギリシャ人はここまでたどり着けなかったため、「理解できる数の範囲」を拡げようとして、どんどん複雑な図形を描いていきました。そこで描けた量は「理解できる数」に分類されるからです。古代ギリシャの数学者たちは、数の範囲を広げる意欲に燃えて作図問題に取り組んだ。その一つの目標になったのが《正多角形の作図問題》だったのです。

古代ギリシャの数学者たちは、数の範囲を拡げる意欲に燃えて、
作図問題に取り組んだ。その一つの目標になったのが
《正多角形の作図問題》だった。

正三角形　　　　一番作図しやすい図形
正四角形（正方形）　直角が作図できれば容易
正五角形　→　作図可能だが易しくない　（後述）
正六角形　　　容易
正七角形　→　実は、定規とコンパスだけでは作図できない
正八角形　　　容易
：
正17角形
：
今では、正n角形が定規とコンパスだけで作図できる必要十分条件もわかっている。

今日、最初に正三角形の作図が出てきました。正三角形は先程申しましたように、一番作図しや

すい図形です。正四角形（正方形）は、直角さえ作図できれば簡単に作図できます。正五角形、これも定規とコンパスだけで作図できます。正六角形は正三角形を 6 つ描くことで容易。正七角形は、実は定規とコンパスだけでは作図できないのです。案外知らない方がいらっしゃいますが、正七角形は定規とコンパスだけで作図できない最初の正多角形です。正八角形は容易…　正 17 角形は、これに関して一つ逸話をお話ししましょう。ドイツにガウスという有名な天才数学者がいます。御存じの方もいらっしゃると思います。この人も《天才数学者ベスト 5》に入る人ですが、1777 年から 1857 年まで、この人もかなり長生きしました。ガウスは、数学に関して考えたことや見つけたことを日記の形で書き残しているのです。これは今でも『ガウス日記』といって実際に見ることができるのですが、人間にとってかけがえのない至宝です。その天才数学者が書き残したガウス日記の第 1 ページにこういう記述があります。

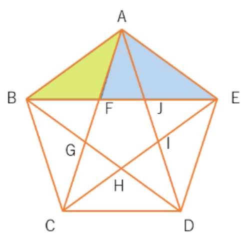
「1796 年 3 月 30 日（この時ガウスはまだ 19 歳の青年です)、朝目が覚めてベッドから起きようとした瞬間に、正 17 角形の作図法を思いついた」

これがガウス日記の冒頭です。天才ってこういうものなんでしょうね。凡人にはあり得ないことです。その後に複雑な式が書いてあって、だから作図できると書いてあります。

正七角形は作図できないといいましたが、これについても面白い話があります。あるとき私の友人が、アラビア文化を解説したパンフレットにこんなことが書いてあるよと教えてくれたのですが、「アラベスク模様は正多角形を組み合わせできていて、アラビア人の芸術家は正五角形、正六角形、正七角形、正八角形を定規とコンパスを用いて作図した」と書いてありました。私はそれを読んでびっくりしました。正七角形は定規とコンパスだけで作図することはできないはずなのです。そこで私は、昔のアラビアの人がどうやって正七角形を作図したのか、そのやり方を取り寄せました。良く調べてみると非常に絶妙にできた《近似図》だったのです。本当の正七角形との誤差はほんのわずかで、東京ドームくらいのサイズの正七角形を描いても、わずか数センチしか違わないくらい正確にできていました。

ただ、現在では「正 n 角形が定規とコンパスだけで作図できるための n に関する必要十分条件」も分かっております。

正五角形　不思議な図形



1辺の長さ　1の正五角形
5 本の対角線の真中に別の
正五角形ができている

AB の長さを 1 としたときの、対角線 BE の長さが知りたい。

正五角形は不思議な図形で、いたるところに同じ角度や相似形が出てくる。

三角形 ABE と三角形 ABF が相似形になる

これに注目すると、BEの長さが自然数の比で書けないことが導ける。これが《無理数》の発見のきっかけだと言われている。

代数を用いると

BEの長さ $= \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ と計算できる。

正多角形を作図するのは古代ギリシャの人たちにとって大きな問題だったのですが、とくに正五角形は数学の発展に非常に大きな影響を与えたと言われています。ここに正五角形を書いてみましょう。

正五角形というのは非常に神秘的な図形で、正五角形 ABCDE の 5 本の対角線を全部書入れてみると、お分かりになるでしょうか、正五角形の真ん中にサイズの小さい正五角形 FGHIJ が現われます。そしてこの図をご覧になると分かりますが、至るところに同じ角度や相似形が出てきます。たとえば、頂点 A には 3 つの角が集まっていますが、これがちょうど頂角を 3 等分していまして、それぞれが 36 度なのです。頂角 A が 108 度で、三角形 ABE は二等辺三角形ですから、底角の∠ABE はまた 36 度になります。こういう風に、至る所に相似形が出てきます。AB の長さは正五角形の一辺ですから長さ

は１。ギリシャ人が非常に悩んだのが線分 BE の長さです。BE は対角線の長さです。この長さを測ることが、ギリシャ人にとって初期の大問題でした。BE は図形で描ける量なので「理解できる量」です。彼らは、だからこれは数（有理数）の形にも表せるに違いないと考えました。ところがここに出てくる図を使うと、BE の長さを自然数の比では表せないことが導けてしまうのです。これが『古代ギリシャの無理量の発見』と呼ばれる、数学史上の大事件です。今日は省きますけれども、「元の図形の AB：BE の比の値は、中央の小さい正五角形の 一辺の長さ：対角線の長さ の比の値」に還元できてしまいます。その比の値は、さらに小さい正五角形の 一辺：対角線の比 に還元できる…比の値を求めようとしても限りがなくて、どんどん小さくなっていく正五角形の中に吸い込まれるように消えてしまう…　このことに最初に気がついた若者は、とんでもないことを言い出した奴だと言われて、口止めに海にドボンと沈められてしまったと記されています。でもこれが、人間が無理数を発見した最初のきっかけだと言われています。人間は初めから《有理数でない数＝無理数》があることを知っていたわけではありません。《無理数の発見》は、古代ギリシャの最大の発見の一つだと言われていますが、そのきっかけになったのが《正五角形の作図》です。他にも正五角形から《黄金比》が生まれています。正五角形は人間の思想史の上でも、とても重要な図形なのです。

以上で第２章を終わりにしましょう。

第３章では再び円周率に戻ります。
古代ギリシャには、『古代ギリシャの３大問題』という有名な難問がありました。

問題１　『円積問題』　与えられた円と同じ面積を持つ正方形を、定規とコンパスで作図せよ。これは言い換えると、「$\sqrt{\pi}$ は作図可能か？」という問題になります。
問題２　『立方体倍積問題』　与えられた立方体の２倍の体積を持つ立方体の一辺を、定規とコンパスで作図せよ。これは言い換えると、「$\sqrt[3]{2}$ は作図可能か？」という問題になります。
問題３　『角の３等分問題』　任意の角を、定規とコンパスだけで３等分せよ。

問題１　円積問題　与えられた円と同じ面積を持つ正方形を作図せよ（言い換えると　$\sqrt{\pi}$ は作図可能か？）

問題２　立方体倍積問題　与えられた立方体の２倍の体積を持つ立方体の１辺を作図せよ（言い換えると $\sqrt[3]{2}$ は作図可能か？）

問題３　角の３等分問題　与えられた角を、定規とコンパスだけで３等分せよ

あるとき、疫病が流行してたくさんの人が亡くなったので神官が占いをしたところ、「祭壇が小さすぎるから疫病が流行るのだ。祭壇をちょうど２倍にしてお祈りをすれば、疫病は収まるだろう」とお告げが下った。そこで人々が祭壇の縦横高さを全部２倍にし、祭壇をものすごく大きくしてお祈りをしたのだが、一向に疫病は収まらない。するとある人が「縦横高さを全部 2 倍にしたなら祭壇の大きさは 8 倍になっている。神様は 2 倍にしなさいと言われたので、これではだめですよ」と言ったそうで、それが『立方体倍積問題』の起こりだといわれています。

今では、この三つの問題は全部解決しています。問題１の『円積問題』は、実に 1882 年まで解けませんでした。1882 年に Lindemann（リンデマン）という人が否定的に解決しまして、「$\sqrt{\pi}$ は定規とコンパスでは作図できません」ということを、大変な苦労の末に証明しました。

『立方体倍積問題』は少し易しい問題ですので、1830 年頃、やはり否定的に解決しています。こうしてみると、ある量が定規とコンパスでは作図できないということを証明するのが、いかに難し

いことかお分かりいただけると思います。問題が提出されてから解決まで、なぜ 2000 年もかかったのでしょうか。実は、方程式に関する知識がこの間に大きく発展し、どんな数だったら定規とコンパスだけで作図できるのか、一般論ができてしまったのです。この一般論を『古代ギリシャの 3 大問題』に当てはめてみたら、全部否定的に解決されてしまったということです。

『角の 3 等分問題』も 1830 年頃、否定的に解決されていて、これらはすべて方程式の理論が発展した副産物として得られています。数を理解するには、図形より方程式のほうが有利であるという認識が、この時代から定着してきました。初等幾何学が重視されなくなったのは、こうした時代背景もあるのでしょう。

$\sqrt{2}$ を「$x^2 = 2$ という方程式の解である」と捉えると、非常に理解しやすくなる。方程式というのは、数を理解するうえで非常に強力な手段なのです。Lindemann が証明したことは「π を理解するための方程式は存在しない」というものでした。方程式の次数を、1 万だろうが 1 億だろうが、どんなに上げていっても、π を解に持つ整数係数の方程式は存在しないのです。円周率 π は方程式によって理解することはできないということで、非常に理解しにくい数であることが解ります。こうした数のことを《超越数》と呼んでいます。つまり、円周率 π は超越数であることが証明された、非常に珍しい数の一つなのです。

こうした話以外にも、数学をやっている人間にとって円周率というのはとても神秘的な数です。色々なところで出てきます。どうしてこんなところに円周率が出てくるのだろうかというようなことを、私は何回も経験しました。そういったものを最後に幾つかお話ししたいと思います。

こうした話以外にも、円周率は非常に神秘的な数である。
幾つか例を挙げてみる。円周率とは「直径と円周の比である」ということを念頭に置いて、以下の式を眺めていただきたい。以下はほんの一例。

◎ 1655年にウォリスが見つけた式

$$\pi = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \ldots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \ldots}$$

◎ Euler の見つけた式：

$e^{\pi i} = -1$　（i は虚数単位、 e は自然対数の底）

◎ 平方数の逆和、4 乗数の逆和

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90}$$

こうした話をする際、皆さんにぜひ頭に入れておいてほしいのは、円周率 π というのは「円周と直径の比だ」ということです。コンパスで円を描いたときの、円周と直径の比、これが円周率の出発点です。ですから、円周率が円に関係する図形のどこかと関係があるのだったら、なるほどと頷けるのですが、まず最初の式、これはウォリスというイギリスの数学者が 1655 年に見つけた式です。分子を 2 2 4 4 6 6 8 8… と増やしていき、分母を 1 3 3 5 5 7 7 9… と増やしていきながら掛け算をしていきます。こういう形でずーっと掛け算を続けていくと、その値は円周率 π になるというのです。どう見ても右辺は円とは無関係です。どうしてこんな式を見つけたのでしょう？

2 番目はオイラーの見つけた有名な式で、自然対数の底の e と円周率 π と虚数単位 $i = \sqrt{-1}$ の間の、実に神秘的な関係式です。特殊な背景を持った三つの数を、こういう形で組み合わせると -1 になる。これも非常に不思議ですね。

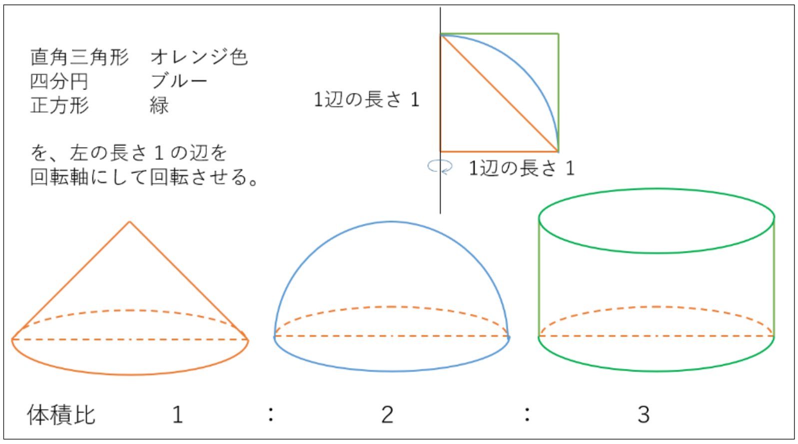
そして、私はこの三つめの式に、特に神秘性を感じています。

自然数 1 、2 、3 、…　を、$\frac{1}{1^2}$ ，$\frac{1}{2^2}$ 、$\frac{1}{3^2}$ ，$\frac{1}{4^2}$ 、…　と逆 2 乗にして全部足していくと、その和がなんと $\frac{\pi^2}{6}$ となる。また、自然数の 4 乗分の 1 を全部足すと、その和は $\frac{\pi^4}{90}$ となる。なぜ、自然数

の平方の逆数の和、4 乗数の逆数の和の合計に、円周率が出てくるのか？　これはどう考えても分かりません。証明を読めば、結論の正しいことは理解できます。でも、なぜここに円周率が出てくるのかは分かりませんね。見つけた人もすごいです。驚くべき洞察力！　実は 6 乗に関しても 8 乗に関しても似たようなことが言えて、6 乗分の 1 の合計は、$\frac{\pi^6}{945}$ になります。では 3 乗分の 1 はどうなのか？　これはだれでも考えることでしょう。自然数の 3 乗分の 1 を全部足していくと、π^3 × 簡単な有理数になるのではないか？　ところがこれは今でも証明もできていないし、否定もできていません。偶数乗分の 1 のときだけ、合計が求まって、そこに π が顔を出すのです。
　これ以外にも π が出てくる不思議な現象は、いくらでもありますが、今回はここまでにしておきましょう。

　最後に、円周率の近似値 3.14 を最初に発見したアルキメデスに敬意を表して、アルキメデスの見つけた素晴らしい結果について触れておきましょう。この人は紀元前 212 年に亡くなっています。この年、住んでいたシラクサの町がローマに占領されるという事件が起こりました。そのとき、アルキメデスは砂の上に図を描いて一生懸命幾何の問題を考えていました。彼の前にローマ兵がやってきて、砂の上に描いた彼の図形を踏んづけたので、アルキメデスは顔も上げないで「わしの図形からどけ」と言い、怒った兵士に刺し殺されてしまったと伝えられています。アルキメデスらしい最期ですが、生涯、これから紹介する業績を自分の仕事の中で最も優れたものだと思っていて、それを自分の墓石に彫ってくれるように遺言していたそうです。

　次の図をご覧ください。
　上に描いてある図には、三つの図形が重なっています。



　まず、底辺が 1、高さも 1 の直角三角形が描いてあります。斜辺は $\sqrt{2}$ です。これを左端の縦棒を軸にしてグルッと回す。そうすると左側のような円錐形ができます。また上の図に戻っていただきまして、半径 1 の円を 4 分の 1 に切ったものがありますね。これを同じ回転軸でグルッと回すと、地球の北半球みたいな図形ができます。最後に、1 辺の長さ 1 の正方形をグルッと回すと、高さが 1 の円柱ができます。

　アルキメデスは、一番左の図形（底辺が 1、高さも 1 の直角三角形を回転した円錐形）の体積が $\frac{\pi}{3}$ であることを最初に証明した人なのです。さらに、二番目の図形（半径 1 の四分円を回転させた半円球）の体積が $\frac{2\pi}{3}$ となることも証明しました。三番目の円柱の体積は π ですから、三つの図形

を回転させて得られる三つの美しい立体図形の体積比は、なんと １：２：３ になるということです。これが、アルキメデスが最も気に入っていた業績だそうです。

私の家内がこれを見て「図形をみんな逆さまにしたら、分かりやすくない？」と言いました。一番左は漏斗みたいな容器、二番目の図形を逆さまにすると丸いボウルになり、右の図形をひっくり返すと丸い桶になります。アルキメデスの結論は、「漏斗に水を縁まで汲んでボウルに入れると、２杯でちょうど縁までいっぱいになる。また、漏斗に水を汲んで桶に入れると、３杯でちょうど縁までいっぱいになる」と言うことです。見た目がこんなに違う立体なのに、体積比が 1：2：3 になる。これはやはり非常にきれいな結果だと思いますし、それを厳密に証明したアルキメデスは素晴らしい人です。

今日の話はこれで終わりにしましょう。最後のシートに、円周率の値を小数点以下 90 桁まで書いてあります。

補足

円周率の値（小数点以下 90桁）

π ＝<u>3.141592653589</u> 793238462643 383279502884
197169399375 105820974944 592307816406
286208998628 034825342117 067982148086

地球は太陽の周りをほぼ円形の軌道で回っている。直径は１億5000万キロ。

軌道の計算： 150,000,000,000(m)×下線部の円周率
＝ 471,238,898,037(m)

要するに、円周率を小数点以下10桁まで知っているということは、地球の軌道をメートル単位で求められることを意味している。
実用上は、3.14 で十分。3.1416 まで知っていれば困ることはない。

Yes, I have a Number.

円周率はどのくらいまで必要なのかということを言いたくて書いてみました。地球は太陽の周りを１年かけて回っていますが、軌道の半径は１億 5,000 万キロだといわれています。直径１億 5,000 万キロの円の軌道の長さを計算するとき、メートル単位まで測ろうとする人はいませんよね。でも、円周率を小数点以下 10 桁まで使えば、その程度まで出てきてしまいます。つまり、円周率の下の方の数字は、実用上ほとんど意味がありません。有効数字というものがありますから、円周率は 3.14 で十分。何かで精密な議論をしなくてはいけないことが出てくれば、3.1416 まで知っていれば十分。これで困ることは絶対にありません。

日本語は五十音の全部に母音が入っているので、五十音を独立に使うことができます。この性質を利用して、日本語には数字を覚えるための歌（？）が色々作られています。例えば「ひとよひとよにひとみごろ」とか「みいろに並ぶ」とか。小数を覚えるのに日本語は実に便利ですね。私も、歌を一つ覚えて円周率は 35 桁くらいまで覚えています。

ところが外国ではこうはいかない。別の工夫が要ります。円周率を覚えさせるとき、英語圏では、Yes, I have a number. という文章を学生に覚えさせるんだそうです。Yes のアルファベットの数が３つでカンマが小数点、Ｉが１で have が４、ａが１，number が６ということで、アルファベットの数を数えると 3.1416 が出てきます。これは秀逸ですね。でも、うっかり Yes, I have the number とやると間違いになります。

人間はどうやって数を理解してきたかということに関してお話してきました。ギリシャ人の数の理解の仕方、その中で作図問題の重要性に触れました。これは伝統となって長く続き、ガウスが正 17 角形を考えたのが 1796 年ですから、200 年前までは数学の中心的な話題だったのです。その後、方程式論が発展して作図問題はすたれてしまいましたが、初等幾何学は楽しいものですし、数学的な考え方を身につけるには最適な方法だと私は思っています。それから、自然数の２乗分の１を全

部足すと $\frac{\pi^2}{6}$ になるという話もしました。こういう式を見ていると、人間は円周率をどこまで理解できたのだろうか？　まだまだ知らない部分があるのではないかという気持ちになります。

今日は、ご清聴どうもありがとうございました。